

Exercício 38 (Cap. 3 do livro)

- a) Sabendo que se ganha 4 unidades monetárias por cada tonelada vendida no período e se perde 2 unidades monetárias por cada tonelada que fica por vender, calcule a tonelagem a comprar no início de cada período, com o objetivo de maximizar o lucro esperado (valor esperado do lucro).

Seja L o lucro obtido e a a tonelagem a comprar no início de cada período (stock), então:

$$L = \begin{cases} 4x - 2(a - x) & , x < a \quad (\text{procura inferior ao stock}) \\ 4a & , x \geq a \quad (\text{procura superior ao stock}) \end{cases}$$

a : Max $E[L]$

$$\begin{aligned} E[L] &= \int_{-\infty}^a (6x - 2a)f(x)dx + \int_a^{+\infty} 4af(x)dx = \int_0^a (6x - 2a)\frac{1}{4}dx + \int_a^4 4a\frac{1}{4}dx = \\ &= \frac{1}{4} [3x^2 - 2ax]_0^a + [ax]_a^4 = -\frac{3}{4}a^2 + 4a \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E[L]}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\partial^2 E[L]}{\partial a^2} = -\frac{3}{2} < 0 \quad (\text{máximo local})$$

A tonelagem a comprar no início de cada período é 2.6667.

- b) Resolva a questão da alínea anterior admitindo adicionalmente que a empresa considera um custo de uma unidade monetária por tonelada de procura não satisfeita no período (custo de penúria). Analise os resultados.

Seja L o lucro obtido e a a tonelagem a comprar no início de cada período (stock), então:

$$L = \begin{cases} 4x - 2(a - x) & , x < a \quad (\text{procura inferior ao stock}) \\ 4a - (x - a) & , x \geq a \quad (\text{procura superior ao stock}) \end{cases}$$

a : Max $E[L]$

$$\begin{aligned} E[L] &= \int_{-\infty}^a (6x - 2a)f(x)dx + \int_a^{+\infty} (5a - x)f(x)dx = \int_0^a (6x - 2a)\frac{1}{4}dx + \int_a^4 (5a - x)\frac{1}{4}dx = \\ &= \frac{1}{4} [3x^2 - 2ax]_0^a + \left[5ax - \frac{x^2}{2} \right]_a^4 = -\frac{7}{8}a^2 + 5a - \frac{8}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E[L]}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4}a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\partial^2 E[L]}{\partial a^2} = -\frac{7}{4} < 0 \quad (\text{máximo local})$$

A tonelagem a comprar no início de cada período é 2.8571. O valor a comprar no início do período é superior ao obtido na alínea a) porque existe um custo por não satisfazer a procura.